17-12-20.

(E): $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$,
όπου $a_2, a_1, a_0$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $I$ της πραγματικής ευθείας και $a_2 \neq 0$ (δηλαδή $a_2(x) \neq 0$ για ένα τουλάχιστον $x \in I$). Εδώ δεν υποτίθεται ότι $a_2(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in I$.

Ένα σημείο $x_0 \in I$ με $a_2(x_0) \neq 0$ λέμε ότι είναι ένα ομαλό σημείο της δ.ε. (E) αν-ν οι συναρτήσεις $a_1/a_2$ και $a_0/a_2$ είναι αναλυτικές στο $x_0$.
Απ' την άλλη, ένα σημείο $x_0 \in I$ τέτοιο ώστε ή $a_2(x_0) = 0$ ή $a_2(x_0) \neq 0$ και μία τουλάχιστον απ' τις δύο συναρτήσεις $a_1/a_2$ και $a_0/a_2$ δεν είναι αναλυτική στο $x_0$ λέμε ότι είναι ένα ανώμαλο σημείο της (E).

Ένα ανώμαλο σημείο της $x_0$ της δ.ε. (E) λέμε ότι είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της (E) αν-ν υπάρχουν δύο συναρτήσεις $A_1$ και $A_0$ με πεδία ορισμού $D_1$ και $D_0$ αντίστοιχα (όπου $x_0 \in D_1 \cap D_0$ και $D_1 \subseteq I$, $D_0 \subseteq I$) οι οποίες είναι αναλυτικές στο $x_0$ τέτοιες ώστε $(x-x_0)a_1(x) = a_2(x)A_1(x)$, $x \in D_1$ και $(x-x_0)^2 a_0(x) = a_2(x)A_0(x)$, $x \in D_0$.
Ένα ανώμαλο σημείο της (E) που δεν είναι ένα κανονικό ανώμαλο σημείο της λέμε ότι είναι ένα μη κανονικό ανώμαλο σημείο της δ.ε. (E).

Πχ **Παράδειγμα 1.**: Να βρεθούν τα ομαλά, τα κανονικά και μη κανονικά ανώμαλα σημεία για καθεμιά από τις παρακάτω:
(i) $y'' + (\cos x)y' + e^x y = 0$, $x \in \mathbb{R}$
(ii) $(x-2)y'' + (\sin 2x)y' + (x^2+1)y = 0$, $x \in \mathbb{R}$
(iii) $y'' + |x|y' + (x+1)^{1/3} y = 0$, $x \in \mathbb{R}$
(iv) $(x^4 - x^2)y'' + (2x+1)y' + x^2(x+1)y = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

**Λύση**: (i) $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = \cos x$, $a_0(x) = e^x$

(ii) $a_2(x) = x-2$, $a_1(x) = \sin 2x$, $a_0(x) = x^2+1$, $x \neq 2$
Αν $x=2$ τότε $a_2(x) = 0$
$x_0 = 2$: $\dfrac{a_1(x)}{a_2(x)} \cdot (x-x_0) = \dfrac{\cancel{(x-2)} \cdot \sin 2x}{\cancel{(x-2)}} = \sin 2x \rightarrow$ αναλυτική.

$$\frac{a_0(x)}{a_2(x)}(x-x_0)^2 = \frac{x^2+1}{\cancel{x-2}}(x-2)^{\cancel{2}} = (x^2+1)(x-2).$$

(iii) $a_2(x)=1$, $a_1(x)=|x|$, $a_0(x)=\sqrt[3]{x+1}$

$x_1=0$ ‖ $\frac{a_1(x)}{a_2(x)}(x) = \frac{|x|\cdot x}{1} = x\cdot|x|$

$x_2=-1$ ‖ $\frac{a_0(x)}{a_2(x)}\cdot x = \frac{\sqrt[3]{x+1}\cdot x}{1} = x\cdot\sqrt[3]{x+1}$

(iv) $a_2(x)=x^4-x^2=x^2(x^2-1)$, $a_1(x)=2x+1$, $a_0(x)=x^2(x+1)$.

Από το $a_2(x)$ έχουμε: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$

$x_1=0$: $\frac{a_1(x)}{a_2(x)} = \frac{2x+1}{x^2(x^2-1)}\cdot\cancel{x} = \frac{2x+1}{x(x^2-1)}$

$x_1=1$: $\frac{a_1(x)(x-1)}{a_2(x)} = \frac{2x+1}{x^2(x^2-1)}(x-1) = \frac{(2x+1)\cancel{(x-1)}}{x^2\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{2x+1}{x^2(x+1)}$ και

$\frac{a_0(x)}{a_1(x)}(x-1)^2 = \frac{\cancel{x^2}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x^2}\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}\cdot(x-1)^2 = (x-1)$

**Θεώρημα 2:** Έστω ένα κανονικό ανώμαλο σημείο $x_0$ της δ.ε. (E) και δύο συναρτήσεις $A_1$ και $A_0$ με πεδία ορισμού $D_1$ και $D_0$ (όπου $x_0\in D_1\cap D_0$ και $D_1\subseteq I$ και $D_0\subseteq I$) που είναι αναλυτικές στο $x_0$ και τέτοιες ώστε:

$(x-x_0)a_1(x)=a_2(x)A_1(x)$, $x\in D_1$ και $(x-x_0)^2a_0(x)=a_2(x)A_2(x)$, $x\in D_2$

Ας είναι $\sum_{n=0} p_n\cdot(x-x_0)^n$ και $\sum_{n=0} q_n\cdot(x-x_0)^n$ δύο δυναμοσειρές με θετικές ακτίνες σύγκλισης $R_1$ και $R_2$ αντίστοιχα τ.ω. :

$A_1(x)=\sum p_n(x-x_0)^n$ για $|x-x_0|<R_1$ και

$A_2(x)=\sum q_n(x-x_0)^n$ για $|x-x_0|<R_2$

Ας είναι $R=\min\{R_1,R_2\}$ και $\lambda_1,\lambda_2$ οι ρίζες της εξίσωσης:

$p(\lambda)\equiv\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0$ με $Re\lambda_1\geq Re\lambda_2$.

Τότε η δ.ε. (E) έχει μία λύση $y_1$ της μορφής:

$y_1(x)=|x-x_0|^{\lambda_1}\sum c_n(x-x_0)^n$ για $0<|x-x_0|<R$ με $c_0=1$.

Μια άλλη λύση $y_2$ της (E) τ.ω. οι $y_1, y_2$ να είναι γρ. ανεξ, βρίσκεται:
(i) Αν $\lambda_1-\lambda_2$ δεν είναι ακέραιος τότε:

$$y_2(x)=|x-x_0|^{\lambda_2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0<|x-x_0|<R \text{ με } d_0=1.$$

(ii) Αν $\lambda_1=\lambda_2$:

$$y_2(x)=y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0<|x-x_0|<R \text{ με } d_0=0.$$

(iii) Αν $\lambda_1-\lambda_2$ είναι θετικός ακέραιος, τότε:

$$y_2(x)=c\,y_1(x)\log|x-x_0|+|x-x_0|^{\lambda_2}\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-x_0)^n \text{ για } 0<|x-x_0|<R$$

και $d_0=1$, για κάποια σταθερά $c$ (μπορεί και $c=0$).

(Πχ) **Άσκηση 2, σελ. 265:** $2x^2y''-xy'+(1-x^2)y=0$, $x_0=0$

**Λύση:** (i) $a_2(x)=2x^2$, $a_1(x)=-x$, $a_0(x)=(1-x^2)$

$a_2(x_0)=a_2(0)=0 \rightsquigarrow$ ανώμαλο.

$$A_1(x)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)}(x-0)^2=\frac{-x}{2x^2}x=-\frac{1}{2}=p_0,\quad R_1=+\infty$$

$$A_2(x)=\frac{a_0(x)}{a_2(x)}x^2=\frac{1-x^2}{2x^2}\cdot x^2=\frac{1-x^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2\to q_0=\frac{1}{2},\quad R_2=+\infty$$

$\Rightarrow R=\min\{R_1,R_2\}=+\infty$

Ενδεικτική: $\lambda^2+(p_0-1)\lambda+q_0=0$

$\Rightarrow \lambda^2+\left(-\frac{3}{2}\right)\lambda+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=1/2.$

$$y_1(x)=|x-0|^{\lambda_1}\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(x-0)^n,\quad c_0=1,\ R=+\infty$$

$$\Rightarrow y_1(x)=|x|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^n,\quad R=+\infty$$

$$x>0:\ y_1(x)=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^n\Rightarrow y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+1}$$

$$0=2x^2y_1''-xy_1'+(1-x^2)y_1=2x^2\sum_{n=1}^{\infty}c_n(n+1)\cdot n\cdot x^{n-1}-x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(n+1)\cdot x^n+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+3}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot c_n\cdot(n+1)\cdot n\cdot x^{n+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot(n+1)\cdot x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n\, x^{n+1}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}c_n\cdot x^{n+3}}_{=\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+1}}=$$

$$= 2\cdot c_1\cdot 2\cdot 1\cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} 2\cdot c_n\cdot(n+1)\cdot n\cdot x^{n+1} - \cancel{c_0\cdot 1\cdot x} - c_1\cdot 2x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot(n+1)\, x^{n+1} +$$

$$+ \cancel{c_0 x} + c_1\cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n\cdot x^{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}\cdot x^{n+1} =$$

$$= (4\cdot c_1 - 2c_1 + c_1)\cdot x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[2n(n+1)c_n - (n+1)c_n + c_n - c_{n-2}\right] x^{n+1}$$

$\rightarrow 3c_1 = 0$

$\rightarrow (2n(n+1) - (n+1) + 1)\, c_n = c_{n-2} \Rightarrow (2n^2 + 2n - n - 1 + 1)\, c_n = c_{n-2}$

$\Rightarrow (2n^2 + n)c_n = c_{n-2}$

$\Rightarrow c_n = \dfrac{1}{n(2n+1)} \cdot c_{n-2}, \; n \geq 2$ $\quad$ $c_1 = 0$, $c_0 = 1$

<u>$n = 2k+1$</u>: $c_{2k+1} = \dfrac{1}{(2k+1)(4k+3)} \cdot c_{2k-1}$, $2k+1 \geq 2 \Rightarrow k \geq 1/2$, $k \geq 1$

$(c_1 = 0)$

Για $k=1$: $c_3 = \ldots = 0$

Για $k=k$: $c_{2k+1} = \ldots = 0$, $k \geq 0$

<u>$n = 2k$</u>: $c_{2k} = \dfrac{1}{2k(4k+1)} c_{2k-2}$, $2k \geq 2 \Rightarrow k \geq 1$.

Για $k=1$: $c_2 = \dfrac{1}{2\cdot 5} c_0 = \dfrac{1}{10}\cdot c_0$

Για $k=2$: $c_4 = \dfrac{1}{4\cdot 9} \cdot c_2$

....

Για $k=k$: $c_{2k} = \dfrac{1}{2k(4k+1)} \cdot c_{2k-2}$.

$c_{2k} = \dfrac{1}{2^k \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4k+1)}, \; k \geq 1$

$y_1(x) = |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot x^n = |x| \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \cdot x^{2n}$, τότε: $\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{2}$ και:

$y_2 = x^{1/2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \cdot x^{n+\frac{1}{2}}$

$0 = 2x^2 y_2'' - x\cdot y_2' + (1-x^2)y =$

$= 2x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{n-\frac{3}{2}} - x\cdot \sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot(n+\frac{1}{2})x^{n-\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot x^{n-\frac{1}{2}} - x^2\sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot x^{n+\frac{1}{2}} =$

$= \sum_{n=0}^{\infty} 2 d_n\cdot(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot(n+\frac{1}{2})x^{n+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot x^{n+\frac{1}{2}} - \sum_{n=0}^{\infty} d_n\cdot x^{n+\frac{5}{2}} =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} d_{n-2}\cdot x^{n+\frac{1}{2}}$

**Πx:** **Παράδειγμα 1, σελ. 257**
**Παράδειγμα 2, σελ. 259** } λυμένα όπως στο βιβλίο.
**Παράδειγμα 3, σελ. 261**

## Διαφορικές Εξισώσεις Legendre:

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης:

$(E_1)$: $(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0$ ($p$ πραγματική σταθερά)

Θα λέμε ότι είναι η δ.ε. Legendre τάξης $p$.

Τα σημεία $1, -1$ είναι δύο κανονικά ανώμαλα σημεία της δ.ε. $(E_1)$, ενώ όλα τα άλλα είναι ομαλά αυτής.

**Θεώρημα 3, σελ. 266:**

Δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις της δ.ε του Legendre $(E_1)$ είναι:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\dots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\dots(p+2n-1)}{(2n)!}\cdot x^{2n}, \quad |x|<1.$$

και

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)(p-3)\dots(p-2n+1)(p+2)(p+4)\dots(p+2n)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad |x|<1.$$

**Θεώρημα 4, σελ. 268:** Έστω $m>0$, $m\in\mathbb{Z}$ και έστω η δ.ε. Legendre τάξης $m$:

$(E_1')$: $(1-x^2)y'' - 2xy' + m\cdot(m+1)y = 0$.

(i) Η δ.ε. $(E_1')$ έχει την $m$-βαθμού πολυωνυμική λύση:

$$y_0(x) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k(2m-2k)!}{k!(m-k)!(m-2k)!}\cdot x^{m-2k}, \quad x\in\mathbb{R}$$ [$y$ λύση της $E_1'$ αν-ν $y = c\cdot y_0$.]

(ii) Η δ.ε. $(E_1')$ έχει τη λύση $\tilde{y}$ που ορίζεται για $|x|<1$ με τύπο:

$$\tilde{y}(x)=\begin{cases} x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{(m-1)(m-3)\dots(m-2n+1)(m+2)(m+4)\dots(m+2n)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1}, & m \text{ άρτιος} \\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{m(m-2)\dots(m-2n+2)(m+1)(m+3)\dots(m+2n-1)}{(2n)!}x^{2n}, & m \text{ περιττός} \end{cases}$$

(iii) Οι λύσεις $y_0$ και $\tilde{y}$ είναι γρ. ανεξ. (στο $(-1,1)$).

**Πρόταση 2:** Για m και n μη αρνητικούς με $m \neq n$: $\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\, dx = 0$

**Απόδειξη:** $P_m$ λύση της εξίσ., δηλαδή: $(1-x^2)P_m'' - 2xP_m' + m(m+1)P_m = 0$, $p=m$

$(1-x^2)P_n'' - 2xP_n' + n(n+1)P_n = 0$, $p=n$

$[(1-x^2)P_m']' + m(m+1)P_m = 0 \quad \times P_n$

$[(1-x^2)P_n']' + n(n+1)P_n = 0 \quad \times P_m$

$\ominus$ κατά μέλη. $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_m')'P_n\,dx + m(m+1)\int_{-1}^{1} P_n\cdot P_m\,dx = 0 \Longrightarrow \\ \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_n')'P_m\,dx + n(n+1)\int_{-1}^{1} P_n\cdot P_m\,dx = 0 \Longrightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\underbrace{\left[((1-x^2)P_m')'P_n - [(1-x^2)P_n']'P_m\right]}_{0}dx + [m(m+1)-n(n+1)]\int_{-1}^{1}P_nP_m\,dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}((1-x^2)P_m')'P_n\,dx = (1-x^2)P_m'\cdot P_n\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'P_n'\,dx$$

Ομοίως, $\int_{-1}^{1}((1-x^2)P_n')'P_m\,dx$.